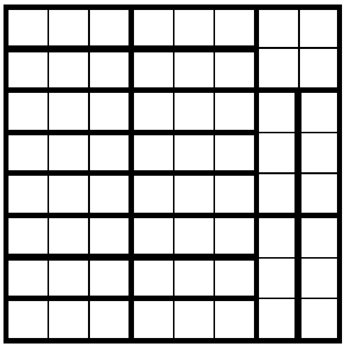
8-9 классы

Геометрия

1. Можно ли разрезать шахматную доску 8×8 на 21 часть равного периметра так, чтобы не все части оказались равными?

Решение.

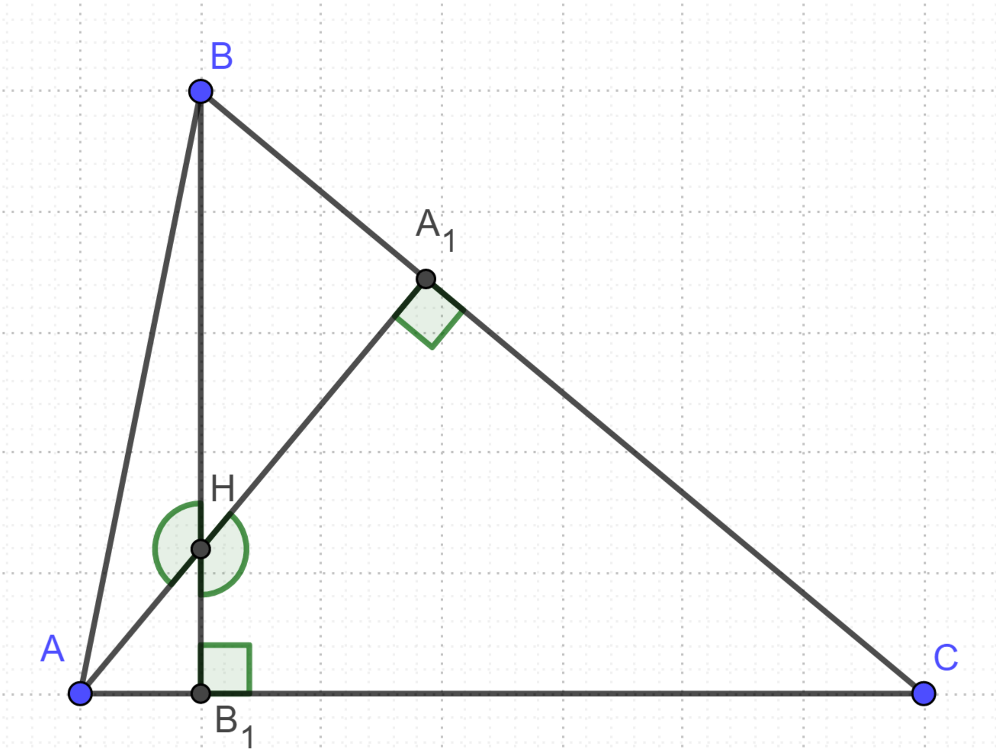
Ответ да



2. В остроугольном треугольнике ABC $\angle BAC = 80°$ и H – точка пересечения высот треугольника, проведенных из точек A и B. $\angle AHB = 126°$. Какая из сторон является наибольшей, а какая – наименьшей стороной треугольника ABC?

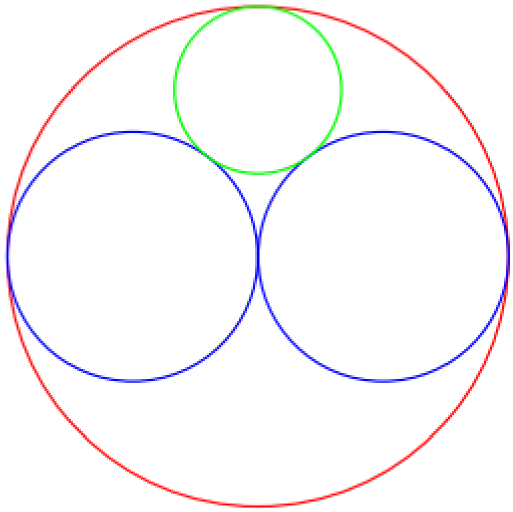
Решение.

Ответ : BC – наибольшая, AC – наименьшая.



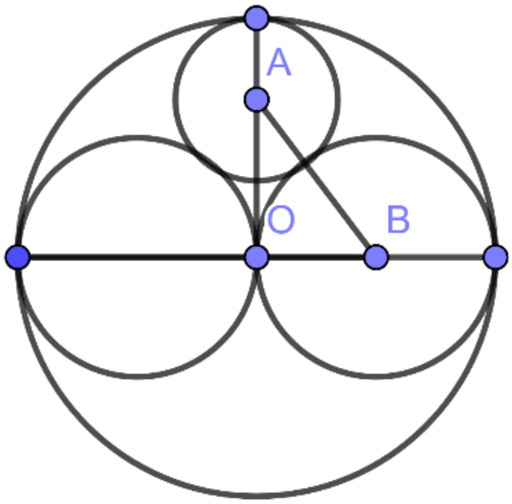
Пусть $AA_1, BB_1,$ – высоты треугольника. Тогда, $\angle A_1HB_1 = \angle AHB = 126°$. Из четырехугольника CA_1HB_1 находим, что $\angle C = 180° - 126° = 54°$. Тогда $\angle B = 180° - 80° - 54° = 46°$.

3. Четыре окружности расположены так, что каждая касается трех других (см. рисунок). Радиусы средних окружностей равны a, радиус большой окружности вдвое больше. Найдите радиус маленькой окружности, если $a = 3030$.



Решение.

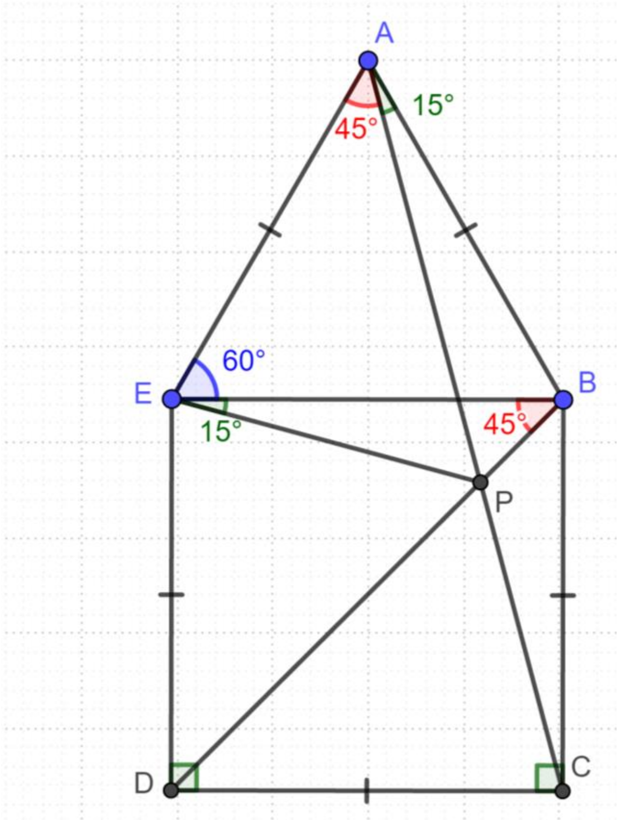
Ответ 2020



Средние окружности касаются в центре большой, а линия, центров большой и малой окружностей перпендикулярна линии центров средних (из симметрии). Обозначив точки как на чертеже, получим, что треугольник ABO имеет стороны с длинами $a, a + R, 2a - R$, где R – радиус малой окружности. По теореме Пифагора $a^2 + 4a^2 - 4aR + R^2 = a^2 + 2aR + R^2$. Откуда, $R = \frac{2}{3}a = 2020$.

4. $ABCDE$ – выпуклый пятиугольник с равными сторонами и $\angle C = \angle D = 90°$. P – точка пересечения диагоналей AC и BD. Докажите, что $PA = PD$.

Решение.



$BCDE$ – квадрат, поэтому треугольник ABE – равносторонний. Из равнобедренного треугольника ABC с углом $\angle ABC = 150°$ находим, что $\angle BAC = 15°$. Тогда, $\angle EAP = 45°$, но и $\angle EBD = 45°$. Следовательно, $ABPE$ – вписан и $\angle BEP = \angle BAP = 15°$. Получили, что $\angle AEP = 75°$ и $\angle PED = 150° - \angle AEP = 75°$. Следовательно, треугольники PAE и PDE равны и $PA = PD$.